

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3,5 puntos)

a) (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Encontrar, si existe, una matriz X tal que se verifique:

$$AB + 2CX = D$$

b) (1 punto) Encontrar el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. (3,5 puntos)

a) (2 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$$

Encontrar los extremos absolutos de f en el intervalo $x \in [1,5]$.

b) (1,5 puntos) Calcular:

$$\int_1^4 (2 - e^{3x}) dx$$

3. (3 puntos) Juan tiene dos urnas A y B. En la urna A hay 4 bolas blancas y 2 bolas negras y en la urna B hay 6 bolas blancas y 8 bolas negras. Juan cierra los ojos y mete la mano en la urna A, saca una bola y, sin mirarla, la pasa a la urna B. Así, la urna B queda con 15 bolas: las 14 originales y la que Juan pasó desde la urna A. Después, Juan mete la mano en la urna B, revuelve las bolas, y saca una bola.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que saca de la urna B sea exactamente la misma que la que pasó desde la urna A?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que saca de la urna B sea blanca?

c) (1 punto) Si la bola que saca de la urna B es blanca, ¿qué probabilidad hay de que la bola que pasó desde la urna A fuera blanca?

OPCIÓN B

1. (3,5 puntos) Una empresa tiene dos fábricas A y B en las que produce acero. Por cada hora de funcionamiento de la fábrica A se producen 5 Tm de acero y 3 Tm de desperdicios y se emiten a la atmósfera 2 Tm de dióxido de carbono. Por cada hora de funcionamiento de la fábrica B se producen 6 Tm de acero y 1 Tm de desperdicios y se emiten a la atmósfera 4 Tm de dióxido de carbono. Por normativa medioambiental, la empresa no puede producir (entre las dos fábricas) más de 48 Tm de desperdicios al día ni puede emitir a la atmósfera (entre las dos fábricas) más de 72 Tm de dióxido de carbono al día. Por otra parte, cada una de las fábricas debe funcionar al menos 6 horas al día, y ninguna de las dos puede funcionar más de 18 horas al día. Plantear y resolver un problema de programación lineal que permita determinar cuántas horas al día debe funcionar cada fábrica para maximizar la cantidad de acero producida por la empresa, teniendo en cuenta las restricciones anteriores.

2. (3,5 puntos)

a) (2 puntos) Dada la función:

$$f = xy$$

definida para $x \in (0,9)$, $y \in (0,3)$, encontrar el punto (x, y) que maximiza f sujeto a la restricción $x + y^2 = 9$.

b) (1,5 puntos) Calcular:

$$\int_1^2 \left(7x^2 + \frac{3}{x}\right) dx$$

3. (3 puntos) Se desea estimar la proporción de individuos con sobrepeso en una población. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple y se va a determinar, de cada individuo, si tiene sobrepeso o no, y a partir de los resultados se construirá un intervalo de confianza para la proporción de individuos con sobrepeso en la población. El intervalo se hará a un nivel de confianza del 96%.

a) (2 puntos) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,1 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

b) (1 punto) Decidimos tomar una muestra de tamaño 200 individuos, de los cuales 40 tienen sobrepeso. Calcular el intervalo de confianza al 96% para la proporción de individuos con sobrepeso en la población.

| k | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

CUESTIONES GENERALES:

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aún así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

Si se comete un error en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá sin tener en cuenta el error y no se penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos.

OPCIÓN A

1. (3,5 puntos)

- a) (2,5 puntos) Calcular AB 0,5 puntos. Calcular $D - AB$ 0,5 puntos. Calcular C^{-1} , 1 punto. Encontrar X 0,5 puntos (si dejan X con algún factor fuera de la matriz, se descontarán 0,25 puntos).
- b) (1 punto) Si lo hacen por Gauss, se valorará con 0,5 puntos la correcta triangulación. Si lo hacen por determinantes, se valorará con 0,5 puntos el correcto cálculo de los determinantes. Por razonar que no tiene rango 3, 0,25 puntos; por razonar que tiene rango 2, 0,25 puntos.

2. (3,5 puntos)

- a) (2 puntos) Calcular la derivada 0,75 puntos. Encontrar el valor crítico $x = 2$ y deducir que es mínimo relativo 0,5 puntos; justificar que es mínimo absoluto 0,25 puntos. Encontrar máximo absoluto 0,5 puntos.
- b) (1,5 puntos) Encontrar la primitiva 1 punto. Sustituir los límites 0,5 puntos.

3. (3 puntos)

- a) (1 punto) Se asigna 1 punto si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado).
- b) (1 punto) Por poner la fórmula correcta (teorema de la probabilidad total u otra si es correcta) 0,25 puntos. Sustituir correctamente y calcular 0,75 puntos.
- c) (1 punto) Por poner la fórmula correcta (teorema de Bayes u otra si es correcta) 0,25 puntos. Sustituir correctamente y calcular 0,75 puntos (si en el denominador se usa el resultado de (b), se dará como bueno en este apartado aunque sea erróneo el del apartado (b)).

OPCIÓN B

1. (3,5 puntos) Escribir la función objetivo 0,5 puntos. Escribir las restricciones 1 punto. Dibujar correctamente la región factible 0,5 puntos y encontrar los puntos extremos 1 punto (si encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los 1,5 puntos). Encontrar el punto óptimo 0,5 puntos.

2. (3,5 puntos)

- a)** (2 puntos) Sustituir correctamente x (ó y) 0,25 puntos. Derivar 0,75 puntos. Encontrar el punto crítico y deducir que es máximo 0,75 puntos. Encontrar el valor de la variable no calculada (x ó y) 0,25 puntos.
- b)** (1,5 puntos) Encontrar la primitiva 1 punto. Sustituir los límites 0,5 puntos.

3. (3 puntos)

- a)** (2 puntos) Saber qué cuantil buscar 0,5 puntos. Encontrarlo 0,5 puntos. Poner la fórmula del error 0,5 puntos. Sustituir y calcular n 0,5 puntos (si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior entero se restan 0,1 puntos).
- b)** (1 punto) Calcular el error (semiamplitud del intervalo) 0,5 puntos; en esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado (a), aunque no lo sea. Si se usa en la estimación de la desviación típica un valor distinto a la proporción muestral 0,2, se restarán 0,25 puntos. Poner la fórmula del IC y calcularlo 0,5 puntos.