

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. En caso de realizar más de tres ejercicios, únicamente se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final se calculará sumando las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividiendo dicha suma por tres.

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y la ecuación matricial

$A X - I X = B$, despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- (5 puntos) Un producto llamado "TechGadget" puede ser adquirido a través de tres canales de venta: en tienda física (a un precio de 10 €), en tienda online (a un precio de 6 €), y en tienda de segunda mano (a un precio de 5 €). Este mes se ha registrado un total de 1.600 € en ventas de este producto. Además, se sabe que el número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física, y que por las ventas en tienda de segunda mano se obtuvieron 800 € más que por las ventas en tienda física. Plantee un sistema de ecuaciones para obtener el número de unidades del producto que se han vendido este mes por cada canal de venta y resuelva dicho anterior utilizando técnicas matriciales.

2.- (10 puntos) Javier disfruta mucho de los partidos de fútbol y de los conciertos, y su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1.000 euros. Cada partido de fútbol cuesta 60 euros y cada concierto, 40 euros. Con la condición de asistir a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos y acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año, responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) ¿Puede Javier asistir a 8 partidos de fútbol y a 8 conciertos? En caso afirmativo, ¿gasta todo su presupuesto?

b.- (8 puntos) Si Javier busca maximizar el número de salidas para divertirse, plantee y resuelva un problema de programación lineal para determinar cuántas veces puede ir a cada sitio. ¿Cuántas escapadas disfrutará en total?

3.- (10 puntos) El cálculo del índice de progreso real (IPR) de un país viene determinado por la función $IPR(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6.000$ siendo $t \in [0, 62]$ el número de años transcurridos desde 1.932. Se pide:

a.- (4 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento del IPR del país.

b.- (3 puntos) ¿En qué año el IPR alcanza su valor máximo y cuál es dicho valor? Asimismo ¿en qué año el IPR registra su valor mínimo y cuál es dicho valor?

c.- (3 puntos) Analice la concavidad y convexidad de la función $IPR(t)$, e identifique, si existe, algún punto de inflexión.

4.- (10 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a.- (3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$.

b.- (3 puntos) Calcule $\int_0^1 f(x) dx$.

c.- (4 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5.- (10 puntos) En España, el 30% de la población tiene menos de 30 años, el 50% tiene entre 30 y 65 años y el 20% tiene más de 65 años. Un estudio afirma que, de las personas de menos de 30 años, un 70% tiene teléfono móvil, que de las personas entre 30 y 65 años, un 95% tiene teléfono móvil y que de las personas de más de 65 años, un 50% tiene teléfono móvil.

- a.- (3 puntos) Se elige una persona al azar. Calcule la probabilidad de que tenga más de 65 años y posea teléfono móvil.
- b.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga teléfono móvil?
- c.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar y resulta que tiene teléfono móvil. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?
- d.- (3 puntos) Elegimos a una persona de cada uno de los tres grupos de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres tengan teléfono móvil? (Puede suponerse independencia entre las tres personas).

6.- (10 puntos) Responda a las siguientes preguntas:

- a.- (2 puntos) En una ciudad, según los datos del INE, el 52% de los habitantes son mujeres y el 48% son hombres. Se eligen cuatro personas de esa ciudad con reemplazamiento. Sea X la variable que cuenta el número de hombres seleccionados. ¿Qué distribución tiene la variable X ? Calcule $P(X=2)$.
- b.- (8 puntos) Queremos realizar una encuesta entre los aficionados de un equipo de fútbol para estimar, mediante un intervalo de confianza, qué proporción piensa que su equipo va a ascender a primera división el año que viene. Usaremos un nivel de confianza del 95%.
 - b.1 (4 puntos) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud de más de 0,08, ¿cuál es el número mínimo de aficionados a los que tenemos que preguntar?
 - b.2 (4 puntos) Decidimos preguntar a 120 aficionados, de los cuales 80 dicen que piensan que el equipo ascenderá. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de aficionados que piensa que el equipo va a ascender.

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

- En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio.
- Debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta (salvo que se pida un método concreto) y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
- Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,3 ptos. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante **y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio**, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Ejercicio 1

- a) (5 puntos) Despejar la matriz, $X = (A - I)^{-1}B$ (1 pto). Calcular la inversa de $A - I$ (3 ptos). Obtener el producto $(A - I)^{-1}B$ (1 pto). En el cálculo de la matriz inversa:
- Si se ha optado por operaciones elementales, se valorará con (1,5 ptos) llevar la matriz inicial a una matriz triangular superior y llegar a la matriz identidad (1,5 ptos).
 - Si el cálculo se ha realizado con la fórmula: al cálculo de la matriz adjunta (1,5 ptos), al cálculo del determinante (0,5 ptos), trasponer y llegar al resultado final (1 pto).
- b) (5 puntos) Definir las tres ecuaciones que definen el sistema (1,5 ptos; 0,5 ptos cada ecuación). Resolverlo (3,5 ptos). Se penalizará con 1 pto soluciones no enteras positivas, a menos que se justifique mediante un comentario la no pertinencia de la respuesta. Para evaluar la resolución del sistema procederá como sigue:
- **Método de Gauss:** Escalonar o simplificar la matriz del sistema de partida (1,5 ptos). Transformar la matriz resultante en sistema de ecuaciones y obtener el valor de una incógnita (1 pto); obtener la solución (1 pto).
 - **Método de Cramer:** Calcular el determinante de la matriz A (1 pto), expresar adecuadamente los determinantes del numerador (1 pto), y obtener la solución final (1,5 ptos = 0,5*3 ptos).

Ejercicio 2

- a) (2 puntos) Respuesta justificada a cada pregunta (1+1 ptos).
- b) (8 puntos) Planteamiento del problema (2,5 ptos), representar la región factible (2,5 ptos) y cálculo de la solución óptima (3 ptos). El desglose será:
- Definir las variables de decisión (0,25 ptos) y la condición de no negatividad (0,25 ptos). Definir la función objetivo (0,5 ptos) y definir las tres restricciones del enunciado (1,5 ptos = 0,5*3).
 - Representar la región factible (0,5 ptos por cada una de las restricciones y 0,5 ptos por la intersección de todas ellas).
 - En el cálculo de la solución óptima: **Método algebraico.** Si se ha optado por evaluar la función objetivo en los vértices: calcular las coordenadas de los vértices (2 ptos = 0,5*4), evaluar la función objetivo en los vértices (0,8 ptos = 0,2*4). Determinar el vértice donde se alcanza el máximo y su valor (0,2 ptos). **Método gráfico.** Si se ha optado por líneas de nivel: representar una primera recta de nivel 0,8 ptos, una paralela 0,8 ptos y la dirección de mejora 0,4 ptos. Razonar gráficamente el vértice solución (0,5 ptos). Determinar analíticamente las coordenadas del máximo (0,3 ptos) y su valor (0,2 ptos).

Ejercicio 3

- a) (4 puntos) Calcular $IPR'(t)$ (1,5 ptos) y obtener las raíces de la ecuación (1,5 ptos). Intervalos de crecimiento y decrecimiento (1 pto). Se penalizará con 0,3 ptos trabajar con t negativo.
- b) (3 puntos) Determinar el valor de t para el que $P(t)$ es máximo (1 pto) y calcular su valor (0,5 ptos). Determinar el valor de t para el que $P(t)$ es mínimo (1 pto) y calcular el valor mínimo (0,5 ptos).
- c) (3 puntos) Calcular derivada segunda (1 pto) y calcular sus raíces (0,5 ptos). Concluir que se trata de un punto de inflexión (0,5 ptos). Analizar la concavidad y convexidad de la función (1 pto).

Ejercicio 4

- a) (3 puntos) Analizar la condición de continuidad en el punto $x=2$ (2 ptos). Continuidad en el resto de la recta real (1 pto).
- b) (3 puntos) Cálculo de la integral indefinida (2 ptos), restando 1 pto si no se ha ajustado la derivada del denominador en el numerador. Aplicar la Regla de Barrow para llegar al cálculo solicitado (1 pto).
- c) (4 puntos) Identificar indeterminación $(\infty - \infty)$ (0,5 ptos), multiplicar por el conjugado (1 pto), operar y simplificar (1 pto). Calcular justificadamente el límite de la expresión resultante (1,5 ptos).

Ejercicio 5

Para obtener la máxima calificación no se necesita tanto detalle como aparece en la pauta de corrección. La falta de notación puede ser sustituida por la explicación, diagramas o tablas.

- a) (3 puntos) Definir los sucesos que intervienen en el enunciado: E_1 =Grupo de Edad < 30 años, E_2 =Grupo de Edad [30-65], E_3 =Grupo de Edad > 65 años, M = Tener teléfono móvil (1 pto). Calcular la probabilidad de tener móvil y ser >65 (2 ptos).
- b) (2 puntos) Identificar que hay que aplicar el teorema de la probabilidad total (0,5 ptos) y extraer del enunciado las probabilidades (0,5 ptos). Aplicar la fórmula y obtener el resultado (1 pto).
- c) (2 puntos) Expresar la probabilidad a calcular como $P(E_3/M)$ (0,5 ptos). Identificar que hay que aplicar el teorema de Bayes y extraer del enunciado los datos (0,5 ptos). Aplicar la fórmula y obtener el resultado (1 pto).
- d) (3 puntos) Calcular la probabilidad de tener móvil en cada grupo de edad (1 pto). Aplicar la fórmula para sucesos independientes y obtener el resultado (2 ptos).

Ejercicio 6

a.- (2 puntos) Responder a ¿Qué distribución tiene la variable X ? (0,5 ptos) y calcular $P(X=2)$ (1,5 ptos)

b.- (8 puntos)

b1.- (4 puntos) Considerar $\hat{p} = 1/2$, el valor más desfavorable o conservador para calcular el intervalo de confianza (1 pto). Saber qué cuantil buscar y calcularlo (1 pto). Poner la fórmula del error o amplitud sustituir y calcular el valor de n (2 ptos). Si se deja el valor de n no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan 0,5 ptos. Si el cálculo se realiza tomando el error (semiamplitud) en vez de la amplitud, se resta 1 pto.

b2.- (4 puntos) Calcular \hat{p} (1 pto) y calcular el error del intervalo (2 ptos). En esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado b1.-, aunque no lo sea. Poner la fórmula del intervalo de confianza y calcularlo (1 pto).