

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta, se deberá elegir entre OPCIÓN I y OPCIÓN II, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirán los apartados de la opción que aparezca respondida en primer lugar.

Cada ejercicio del examen se califica sobre 10 puntos y las cuatro preguntas tienen el mismo peso en la nota final (2,5 puntos). La nota final se obtendrá sumando las puntuaciones de los ejercicios y dividiendo el total entre 4.

Se valorará la capacidad de argumentar y verificar las soluciones propuestas, así como el uso adecuado del lenguaje matemático y de explicaciones fundamentadas en los resultados teóricos aprendidos durante el curso.

La tabla de la distribución normal está disponible al final del examen, aunque es posible que no sea necesaria en ninguna pregunta.

1.- (10 puntos) Un agricultor siembra dos tipos de cultivos, maíz y trigo, con beneficios económicos de 800 € y 500 € por hectárea, respectivamente. Por cada hectárea, el maíz requiere 200 kg de fertilizante y el trigo requiere 300 kg de fertilizante. La disponibilidad total de fertilizante es de 6.000 kg. Además, el agricultor debe plantar al menos 10 hectáreas entre maíz y trigo, y la superficie de maíz no debe exceder a la superficie de trigo.

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita maximizar el beneficio.

b.- (2 puntos) Considerando la región factible definida en el apartado anterior y suponiendo que el beneficio por hectárea de maíz es de 800 € y el de trigo es de 1.200 €, justifique si (3,18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.

2.- (10 puntos) La función $B(x) = \begin{cases} 2x(32-4x) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -20x+180 & \text{si } 3 < x \leq 9 \end{cases}$ representa el beneficio mensual de una empresa, en miles de euros, en función del precio unitario (€), x , al que vende su producto.

a.- (4 puntos) Justifique si la función $B(x)$ es continua.

b.- (6 puntos) Calcule el precio unitario al que la empresa debe vender el producto para obtener el máximo beneficio e indique a cuánto asciende dicho valor.

3.- (10 puntos) En la cafetería de un museo de arte contemporáneo, famosa por sus bebidas personalizadas y su ambiente artístico, los visitantes pueden elegir entre tres tipos de consumiciones preparadas de manera especial: café, té o bebida fría. Entre los jóvenes que frecuentan la cafetería, el 40% prefieren el café, el 35% eligen el té y el 25% optan por una bebida fría. Además, se sabe que, entre quienes prefieren el café, el 50% lo toman sin azúcar; entre quienes eligen el té, el 80% lo toman sin azúcar; y entre quienes prefieren una bebida fría, el 40% la toman sin azúcar.

a.- (4 puntos) Calcule la probabilidad de que un joven elegido al azar haya pedido una bebida fría sin azúcar.

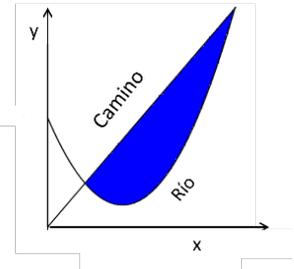
b.- (6 puntos) Se selecciona un joven al azar y sabemos que ha pedido una consumición sin azúcar, calcule la probabilidad de que haya pedido una bebida fría.

4.- (10 puntos) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

Opción I

Q1.- (5 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $3AX - B = C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X .

Q2.- (5 puntos) Una finca está delimitada por un río cuyo curso puede describirse mediante la ecuación $y = (x - 2)^2 + 1$ y por un camino que tiene como dirección la ecuación $y = 2x$ (véase la figura para mayor claridad). Suponiendo que tanto el eje x como el eje y se miden en kilómetros, calcule el área de la finca. Sabiendo que en la zona, la hectárea se paga a 3.000 €, calcule el precio de la finca.



Nota: 1 km² = 100 hectáreas.

Opción II

Q1.- (5 puntos) Justifique la existencia (o ausencia) de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas para la función $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$. En caso de que existan, indique sus respectivas ecuaciones.

Q2.- (5 puntos) Una ONG de Aragón pretende organizar turnos de voluntarios para colaborar con los afectados de una catástrofe. Basándose en experiencias previas, estiman que el 25% de los aragoneses estarían interesados en participar. No obstante, para tener una estimación más precisa han decidido realizar una encuesta entre la población aragonesa. ¿Cuántas personas deben encuestar como mínimo para estimar la proporción de quienes estarían dispuestos a colaborar con la ONG, con un error máximo del 5% y con un nivel de confianza del 94%?

Tabla de la distribución normal (puede no ser necesaria para el examen):

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

- En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio.
- Debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta (salvo que se pida un método concreto) y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
- Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,5 ptos/10. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante **y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio**, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

(10 puntos) Ejercicio 1

- a) **(8 puntos)** Planteamiento del problema (3 ptos), representar la región factible (2,5 ptos) y cálculo de la solución óptima (2,5 ptos). El desglose será:
- Definir las variables de decisión (0,5 ptos) y la condición de no negatividad (0,5 ptos). Definir la función objetivo (0,5 ptos) y definir las tres restricciones del enunciado (1,5 ptos = 0,5*3).
 - Representar la región factible (0,5 ptos por cada una de las cuatro restricciones y 0,5 ptos por la intersección de todas ellas 2,5 ptos = 0,5*4 + 0,5).
 - Solución óptima (2,5 ptos):
Método algebraico.
Calcular las coordenadas de los vértices (1,6 ptos = 0,4*4), evaluar la función objetivo en los vértices (0,4 ptos = 0,1*4), determinar el vértice donde se alcanza el máximo y su valor (0,5 ptos), respondiendo así a la pregunta formulada.
Método gráfico. Representar una primera recta de nivel (1 pto), una paralela (0,5 ptos) y la dirección de mejora (0,25 ptos). Determinar analíticamente las coordenadas del máximo (0,5 ptos) y su valor (0,25 ptos).
- b) **(2 puntos)** No se ofrecen calificaciones intermedias.

(10 puntos) Ejercicio 2

- a) **(4 puntos)** Escribir la condición de continuidad en $x = 3$ (1 pto). Determinar el valor de la función en el punto (0,5 ptos), cálculo de límites laterales y concluir continuidad en $x = 3$ (2 ptos). Continuidad en el resto del intervalo (0,5 ptos).
- b) **(6 puntos)** Calcular $B'(x)$ en $0 < x < 3$ (1,5 ptos), calcular el punto crítico (0,5 ptos), indicar que el punto no pertenece al intervalo $0 \leq x \leq 3$ (0,5 ptos). Evaluar la función beneficio en $x = 0$ y $x = 3$ para determinar el máximo absoluto en el intervalo cerrado y acotado (0,5 ptos). Alternativamente pueden comprobar que la función es creciente y en $x = 3$ se obtiene el máximo (0,5 ptos).
- Calcular $B'(x)$ en el intervalo $3 < x < 9$ (0,5 ptos) y concluir que en $3 < x < 9$ no existen puntos críticos (0,5 ptos).
- Obtener las coordenadas (x) del máximo (1,5 ptos) y su valor (0,5 ptos).

(10 puntos) Ejercicio 3

Para obtener la máxima calificación no se necesita tanto detalle como aparece en la pauta de corrección. La falta de notación puede ser sustituida por la explicación, diagramas o tablas.

- a) **(4 puntos)** Expresar la probabilidad a calcular como $P(BF \cap SA)$ (1 pto). Extraer del enunciado las probabilidades (1 pto) y obtener el resultado (2 ptos).
- b) **(6 puntos)** Identificar que se debe aplicar el teorema de Bayes y extraer las probabilidades del enunciado (2 ptos). Aplicar el teorema de la probabilidad total para calcular el denominador (2 ptos). Calcular el resultado final aplicando el teorema de Bayes (2 ptos).

(10 puntos) Ejercicio 4. Opción I

- Q1) (5 puntos)** Determinar el número de filas y columnas de la matriz X (0,5 ptos), despejar la matriz X de la ecuación (1 pto) y calcular la solución (3,5 ptos). El desglose de la puntuación para el cálculo de la matriz solución será: calcular la inversa de la matriz A (2 ptos), calcular $C + B$ (0,5 ptos), el producto $\frac{A^{-1}(C+B)}{3}$ (1 pto). En el cálculo de la matriz inversa, si se ha optado por operaciones elementales, se valorará con (1 pto) hacer ceros bajo la diagonal y (1 pto) llegar a la matriz identidad. Si el cálculo se ha realizado con la fórmula: (1 pto) al cálculo de la matriz adjunta, (0,5 ptos) al cálculo del determinante y (0,5 ptos) trasponer y llegar al resultado final.
- Q2) (5 puntos)** Determinar los puntos de corte (0,5 ptos), plantear el integrando y límites de integración para calcular el área (1 pto), calcular la integral indefinida (2 ptos = 1 + 1 ptos) y aplicar la regla de Barrow para obtener el resultado (1 pto). Calcular el valor de la finca (0,5 ptos).

(10 puntos) Ejercicio 4. Opción II

- Q1) (5 puntos)** Dominio (0,5 ptos), por el planteamiento del límite cuando x tiende a los puntos que no pertenecen al dominio (0,5 ptos); por el cálculo adecuado del límite y la conclusión sobre la existencia de asíntotas verticales (1 pto). Por el estudio de las asíntotas horizontales (1 pto), distribuidos en 0,5 puntos para el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y 0,5 puntos para el límite cuando $x \rightarrow -\infty$; y finalmente, (2 ptos) por el estudio de las asíntotas oblicuas, repartidos en 1 pto para el cálculo del término m (pendiente) y 1 pto para el cálculo del término n (ordenada en el origen).
- Q2) (5 puntos)** Saber qué cuantil buscar y calcularlo (1,5 ptos). Escribir la fórmula de error o amplitud, sustituir y calcular (1,5 ptos) y calcular el valor de n (2 ptos). Si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan 0,5 ptos.