El examen consta de cuatro preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2,5 puntos. La primera pregunta es obligatoria, mientras que en las tres últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 2, 3 y 4. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. Se quiere contruir una estructura con forma de tetraedro cuya base tiene como vértices los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,0,1/2)$ y $C(3/2,3,1)$ y el vértice superior, D, se encuentra en una viga recta entre los puntos $E(0,1,3)$ y $F(3,2,3)$ (es decir, $D = E + \lambda\overrightarrow{EF}$ con $\lambda \in [0,1]$).

a) *(1,5 puntos)* Calcula el volumen máximo de dicha estructura (todos los datos están dados en metros).

b) *(1 punto)* Teniendo en cuenta que el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura, calcula la altura de la estructura (desde D a la base) si tomásemos $\lambda = 1$.

2. Elige entre 2.1 y 2.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z & = & -1, \\ 8x+my-6z & = & -8, \\ -x-2y+m^2z & = & m, \end{array}\right.$$

con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro.

a) *(1,5 puntos)* Estudia, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el número de soluciones del sistema anterior.

b) *(1 punto)* Resuelve, si es posible, el sistema para $m = 1$.

2.2 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) *(1,5 puntos)* Estudia si existen matrices columna no nulas B y C tales que

$$\left\{\begin{array}{rcl} A\cdot B & = & -B, \\ A\cdot C & = & B-C. \end{array}\right.$$

En caso afirmativo, calcula la expresión general de dichas matrices B y C.

b) *(1 punto)* Sea D una matriz columna no nula tal que $A\cdot D = D$. Demuestra que también se cumple $A^{-1}\cdot D = D$.

3. Elige entre 3.1 y 3.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

3.1 **a)** *(0,5 puntos)* Dada la función $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(x)\cos(x)$ con $x \in \mathbb{R}$, calcula $f'(x)$.

b) *(1 punto)* Obtén $\displaystyle\int \frac{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)}{2+\operatorname{sen}(x)\cos(x)}\mathrm{d}x$.

c) *(1 punto)* Calcula (si existe), en función del valor de $k \in \mathbb{Z}$, el valor del límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^4+x^3-x^2-x)}{(x^2-1)^{2k}}.$$

3.2 Sea $g(x) = x - \operatorname{sen}(x)$ con $x \in \mathbb{R}$.

a) *(0,5 puntos)* Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de $g(x)$.

b) *(0,5 puntos)* Obtén los máximos y mínimos absolutos de $g(x)$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

c) *(1,5 puntos)* Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $h(x) = x\,g(x)$, el eje X y las rectas $x = \pi/2$ y $x = \pi$.

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Dentro de un estudio sobre la brecha que existe en el acceso de las mujeres a las carreras del ámbito de las STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas) se está analizando el caso de Teruel.

La Universidad de Zaragoza cuenta con 3 centros en Teruel: la Facultad de Ciencias Sociales, la Escuela Universitaria Politécnica y la Escuela Universitaria de Enfermería. En el curso 2024-2025 se matricularon en esos centros 1550, 250 y 150 estudiantes, respectivamente. Además, en la Facultad de Ciencias Sociales el 74 % de los estudiantes son mujeres, en la Politécnica lo son solo el 18 % y en Enfermería el 76 %.

Colabora con el estudio y contesta las siguientes preguntas:

a) *(1 punto)* Si se elige un estudiante universitario en Teruel, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) *(1 punto)* Sabiendo que la escogida es mujer ¿cuál es la probabilidad de que dicha estudiante esté matriculada en la Escuela Politécnica?

c) *(0,5 puntos)* Si el estudiante escogido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculado en la Escuela Politécnica?

4.2 El beneficio mensual de dos empresas locales puede aproximarse por dos variables aleatorias con distribución normal. La media y la desviación típica, en euros, de ambas distribuciones es la siguiente:

Empresa	Media	Desviación típica
PI S.A.	11125	527
RHO M.A.	10950	430

Hay dos inversores que quieren invertir parte de sus ahorros en una de estas dos empresas.

a) *(1,25 puntos)* El primer inversor, con perfil agresivo, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener un beneficio mensual superior a 10000 euros sea mayor. ¿En qué empresa debe invertir?

b) *(1,25 puntos)* El segundo inversor, con un perfil más conservador, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener pérdidas a lo largo de un mes sea menor. ¿En qué empresa debe invertir?

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	**0,0**
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	**0,1**
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	**0,2**
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	**0,3**
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	**0,4**
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	**0,5**
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	**0,6**
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	**0,7**
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	**0,8**
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	**0,9**
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	**1,0**
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	**1,1**
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	**1,2**
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	**1,3**
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	**1,4**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	**1,5**
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	**1,6**
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	**1,7**
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	**1,8**
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	**1,9**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	**2,0**
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	**2,1**
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	**2,2**
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	**2,3**
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	**2,4**
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	**2,5**
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	**2,6**
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	**2,7**
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	**2,8**
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	**2,9**
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	**3,0**
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	**3,1**
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	**3,2**
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	**3,3**
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	**3,4**
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	**3,5**
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	**3,6**

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si el valor buscado se encuentra entre dos valores de la tabla, elija el más próximo de los dos. En el caso de que las distancias por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

El diseño de esta prueba no solo se centra en evaluar la adquisición de conocimientos matemáticos, sino también en valorar **la integración de los saberes y las competencias específicas**. Entre ellas, destaca la capacidad de **modelización y resolución de problemas**, y su aplicación para abordar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito científico. **Los estudiantes deberán justificar sus procedimientos y cómo llegaron a sus conclusiones, explicando por qué estas son válidas dentro del contexto del problema.** Aquí se valorará especialmente que los estudiantes puedan explicar procedimientos de forma comprensible.

En conjunto, la evaluación no solo tomará en cuenta la corrección de los procedimientos utilizados, sino también la capacidad de los estudiantes para conectar ideas matemáticas y aplicar los saberes adquiridos a contextos reales, alineando su aprendizaje con los criterios de evaluación establecidos en el currículo.

Criterios adicionales:

- **Planteamiento y explicaciones:** En las respuestas primará el correcto planteamiento del problema y se valorarán positivamente las explicaciones claras y precisas, y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas. En ningún caso se otorgará la calificación máxima cuando únicamente se dé el resultado sin aportar ningún cálculo ni explicación. También se evaluará negativamente (con, hasta un máximo de un punto en el examen) la falta de rigor matemático, un mal uso de los símbolos matemáticos o del lenguaje y explicaciones poco claras.
- **Errores y coherencia:** Si se comete un error en una parte de la pregunta que afecta a los resultados posteriores, se valorará si hay coherencia con el resultado erróneo. En tal caso, se valorará el resto de las cuestiones de la misma pregunta, aunque si el error conduce a problemas más simples de los inicialmente propuestos disminuirá la calificación. Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos. **Resultados absurdos**, como 3,5 personas o probabilidades mayores que uno o negativas, serán penalizados. Sin embargo, si los estudiantes reconocen y justifican que estos resultados no son posibles y pueden deberse a errores en cálculos anteriores, la penalización será menor.

1. *(2,5 puntos)*

- **a.** *(1,5 puntos)* Cálculo del producto mixto en función de λ 0,5 puntos. Razonar que el valor del producto mixto es mayor que 0 en todo el intervalo [0,1] 0,3 puntos. Saber la fórmula del volumen y aplicarla correctamente 0,2 puntos. Justificar que el volumen máximo en el intervalo se alcanza con λ=0, 0,3 puntos. Calcular el volumen máximo 0,2 puntos. No dar las unidades penalizará con 0,1 puntos.
- **b.** *(1 punto)* Despejar la altura en función de magnitudes conocidas (o calculables con los datos) 0,3 puntos. Calcular el área de la base 0,5 puntos. La resolución se considerará válida si se realiza por cualquier otro método correcto y suficientemente razonado.

2.1. *(2,5 puntos)*

- **a.** *(1,5 puntos)* Caso compatible determinado 0,3 puntos. Caso m=16, 0,4 puntos. Caso m=1, 0,4 puntos. Caso m=-1, 0,4 puntos.
- **b.** *(1 punto)* No hay puntuaciones intermedias (salvo algún error puntual de cuentas que penalizaría 0,1). Si la solución no sale dependiente de un parámetro, la puntuación máxima será 0,3.

2.2. *(2,5 puntos)*

- **a.** *(1,5 puntos)* Obtener correctamente la matriz B, 0,8 puntos. Obtener correctamente la matriz C, 0,7 puntos.
  - Si solo razonan que el primer sistema es homogéneo y por tanto tiene solución, 0,3 puntos.
  - Si dicen que la única solución será la matriz nula, la puntuación será 0 (salvo que sea 0,3 por el razonamiento anterior).
  - Plantear correctamente el segundo sistema tras resolver el primero 0,2 puntos.
  - No se penalizará en el segundo sistema que el primero se haya resuelto de forma incorrecta salvo que resulte un sistema homogéneo o incompatible, en cuyo caso la puntuación será la mitad.

- Si se da una solución particular (o varias, pero no el caso general), la puntuación máxima del apartado será 0,5 puntos.

b. *(1 punto)* Justificación de que A tiene inversa (necesario) 0,3 puntos. Resto del razonamiento 0,7 puntos.

3.1. *(2,5 puntos)*

a. *(0,5 puntos)* Error en la derivada del seno o del coseno implicará que la nota máxima del apartado sea la mitad. Si el error es en ambas, la puntuación será 0.

b. *(1 punto)* No hay puntuaciones intermedias (salvo olvidarse de la constante de integración que penalizará 0,3 puntos).

c. (1 punto) Caso $k \leq 0$, 0,5 puntos. Caso $k \geq 1$, 0,5 puntos.

3.2. *(2,5 puntos)*

a. *(0,5 puntos)* Cálculo de la derivada de g(x) 0,2 puntos.

b. *(0,5 puntos)* Justificación de dónde se encuentra el máximo y el mínimo absolutos del intervalo 0,4 puntos. Cálculo del valor máximo y mínimo 0,1.

c. *(1,5 puntos)* Justificación de que h(x) es positiva en todo el intervalo 0,35 puntos. Cálculo de la primitiva de h(x) 0,85 puntos. Aplicación correcta de la regla de Barrow y cálculo del área 0,3 puntos.

4.1. *(2,5 puntos)*

a. *(1 punto)* Válida cualquier estrategia para determinar la probabilidad, si es coherente y correcta. Debe contestarse en probabilidad. Si no se da la probabilidad, se descontará 0,3 puntos.

b. *(1 punto)* Válida cualquier estrategia para determinar la probabilidad, si es coherente y correcta. Debe contestarse en probabilidad. Si no se da la probabilidad, se descontará 0,3 puntos.

c. *(0,5 puntos)* Válida cualquier estrategia para determinar la probabilidad, si es coherente y correcta. Debe contestarse en probabilidad. Si no se da la probabilidad, se descontará 0,15 puntos.

4.2. *(2,5 puntos)*

a. *(1,25 puntos)* Aplicar correctamente la transformación de la normal $N(\mu,\sigma)$ a una $N(0,1)$, 0,5 puntos. No es necesario calcular la probabilidad que tiene cada empresa de cumplir la condición para obtener la puntuación máxima. Si se calculan ambas probabilidades, pero no se responde a la pregunta, se penalizará con 0,3 puntos.

b. *(1,25 puntos)* Aplicar correctamente la transformación de la normal $N(\mu,\sigma)$ a una $N(0,1)$, 0,5 puntos. Para el resto de la puntuación del apartado:

- Contestar que la probabilidad en ambos casos será nula por no aparecer en la tabla no puntuará.
- Decir que en ambos casos la probabilidad será pequeña puntuará 0,3. Se sumará 0,1 puntos si se añade algún tipo de razonamiento para contestar a la pregunta.
- Justificar que la probabilidad de la segunda empresa es menor que la de la primera 0,6 puntos. Responder a la pregunta 0,15 puntos.