

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta, se deberá elegir entre OPCIÓN I y OPCIÓN II, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirán los apartados de la opción que aparezca respondida en primer lugar.

Cada ejercicio del examen se califica sobre 10 puntos y las cuatro preguntas tienen el mismo peso en la nota final (2,5 puntos). La nota final se obtendrá sumando las puntuaciones de los ejercicios y dividiendo el total entre 4.

Se valorará la capacidad de argumentar y verificar las soluciones propuestas, así como el uso adecuado del lenguaje matemático y de explicaciones fundamentadas en los resultados teóricos aprendidos durante el curso.

La tabla de la distribución normal está disponible al final del examen, aunque es posible que no sea necesaria en ninguna pregunta.

- 1.- (10 puntos) Miguel quiere mejorar su rendimiento deportivo y ha decidido complementar su dieta con barras de proteínas y carbohidratos. Puede elegir entre dos tipos de barras: A y B. Cada barra A cuesta 1 euro y 50 céntimos y aporta 20 gramos de proteínas y 10 gramos de carbohidratos. Cada barra B cuesta 1 euro y 20 céntimos y aporta 10 gramos de proteínas y 15 gramos de carbohidratos. Para cumplir con su plan de entrenamiento, Miguel necesita consumir, al menos, 600 gramos de proteínas y, al menos, 620 gramos de carbohidratos. Además, no puede consumir más de 100 barras en total.
- a.- (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cuántas barras de cada tipo debe comprar Miguel para que, cumpliendo las restricciones, el coste sea mínimo.
- b.- (7 puntos) Resuelva el problema anterior y determine a cuánto asciende dicho coste mínimo.
- 2.- (10 puntos) Se ha lanzado al mercado la aplicación social *ViviChat* y el número de usuarios en la aplicación en el momento  $t$  está dado por la función  $N(t) = 1.400 \left( \frac{t}{49+t^2} + 100 \right)$  donde  $t$  se mide en cientos de días desde el lanzamiento.
- a.- (3 puntos) Gracias a la campaña previa al lanzamiento, la aplicación ha logrado captar usuarios desde el inicio. Se considera que la campaña ha tenido éxito si el número de usuarios en el momento del lanzamiento ( $t=0$ ) es de, al menos, 100.000. Determine si la campaña ha sido exitosa. Además, calcule cuántos usuarios tendrá la aplicación en un horizonte infinito de tiempo.
- b.- (7 puntos) Suponiendo que  $t \in [1, 14]$ , calcule el valor de  $t$  en el que la aplicación alcanzará el máximo número de usuarios. ¿Cuántos usuarios tendrá la aplicación en ese momento?, y ¿cuántos días habrán transcurrido desde su lanzamiento?
- 3.- (10 puntos) Una plataforma de streaming desea mejorar su catálogo de películas, para lo cual quiere conocer las preferencias de sus usuarios sobre las películas de *Ciencia Ficción* y de *Comedia*, dos de los géneros más populares entre sus suscriptores.
- a.- (5 puntos) Con el fin de conocer las preferencias de sus usuarios, la plataforma ha realizado una encuesta entre una muestra aleatoria simple de 300 suscriptores. De estos, 210 han indicado que prefieren ver películas de *Ciencia Ficción*, mientras que el resto prefieren *Comedia*. Calcule un intervalo de confianza al 96% para la proporción de suscriptores que prefieren ver *Ciencia Ficción*.
- b.- (5 puntos) La plataforma de streaming investiga si la edad de sus usuarios influye en sus preferencias por el género de *Ciencia Ficción*. Han descubierto que el 60% de sus usuarios son menores de 30 años y, dentro de este grupo, el 80% prefiere el género de *Ciencia Ficción*. En cambio, entre los usuarios de 30 años o más, solo el 50% tiene esta preferencia. La plataforma ha decidido premiar a uno de sus usuarios al azar con una suscripción gratuita por un año. Sabemos que el ganador prefiere ver películas de *Ciencia Ficción*. ¿Cuál es la probabilidad de que este usuario tenga menos de 30 años?

4.- (10 puntos) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

**Opción I**

**Q1.- (5 puntos)** Un estudio revela que los estudiantes de bachillerato pasan, en promedio, 3,5 horas haciendo fila para entrar a conciertos, con una desviación típica de 1,8 horas. Se selecciona una muestra aleatoria de 64 estudiantes de bachillerato que asisten esta tarde a un concierto, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio de espera para esa muestra sea inferior a 4 horas?

**Q2.- (5 puntos)** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , resuelva la ecuación matricial  $AX + 2A = A^2$  despejando previamente  $X$ .

**Opción II**

**Q1.- (5 puntos)** Clasifique el sistema de ecuaciones (S) utilizando el teorema de Rouché-Frobenius y, si es posible, calcule la solución.

$$\left. \begin{aligned} x - y + 2z &= -4 \\ 3x - 5y + 8z &= -14 \\ x + 3y - 4z &= 2 \end{aligned} \right\} (S)$$

**Q2.- (5 puntos)** Dada  $f(x) = \frac{x - \sqrt{6-x}}{x-2}$ . Calcule  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ . ¿La función  $f(x)$  tiene una asíntota vertical en  $x = 2$ ? Justifique la respuesta basándose en el cálculo del límite.

**Tabla de la distribución normal (puede no ser necesaria para el examen):**

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

**NOTA:** En la tabla figuran los valores de  $P(Z \leq k)$  para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

## CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

### CUESTIONES GENERALES

- En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio.
- Debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta (salvo que se pida un método concreto) y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
- Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,5 ptos/10. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante **y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio**, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

### (10 puntos) Ejercicio 1

- a) **(3 puntos)** Definir las variables de decisión (0,5 ptos) y la condición de no negatividad (0,5 ptos). Definir la función objetivo (0,5 ptos) y definir las tres restricciones del enunciado (1,5 ptos = 0,5\*3).
- b) **(7 puntos)** Representar la región factible (3 ptos) y cálculo de la solución óptima (4 ptos). El desglose será:
- Representar la región factible (0,5 ptos por cada una de las cinco restricciones y 0,5 ptos por la intersección de todas ellas).
  - Solución óptima:  
**Método algebraico.**  
Si se ha optado por evaluar la función objetivo en los vértices: calcular las coordenadas de los vértices (2,5 ptos = 0,5\*5), evaluar la función objetivo en los vértices (0,5 ptos = 0,1\*5), determinar el vértice donde se alcanza el mínimo (0,5 ptos) y su valor (0,5 ptos), respondiendo así a la pregunta formulada.  
**Método gráfico.** Si se ha optado por líneas de nivel: representar una primera recta de nivel 1 pto, una paralela 1 pto y la dirección de mejora 0,5 ptos. Razonar gráficamente el vértice donde se alcanza la solución (0,5 ptos). Determinar analíticamente las coordenadas del mínimo (0,5 ptos) y su valor (0,5 ptos).

### (10 puntos) Ejercicio 2

- a) **(3 puntos)** Identificar la pregunta con el cálculo del número inicial de clientes, calcular dicho valor y responder a la pregunta (1 pto). Identificar la pregunta con el cálculo del límite y calcularlo (2 ptos).
- b) **(7 puntos)** Calcular  $N'(t)$  (2,5 ptos) y obtener las raíces de la ecuación (1 pto). Se desglosa el resto de calificaciones según la vía de resolución.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento (2 ptos). Se penalizará con 1 pto si se incluyen intervalos de tiempo negativos asociados a la raíz  $t = -7$  (ya que no tiene sentido en el contexto del problema). Determinar el valor de  $t$  para el que  $N(t)$  es máximo (0,5 ptos) y calcular dicho valor máximo (0,5 ptos). Responder al número de días transcurridos (0,5 ptos).
  - Calcular la derivada segunda  $N''(t)$  (1,5 ptos). Signo e interpretación de la derivada segunda en el punto crítico  $N''(t_c)$  (1 pto). Concluir carácter comparando con el valor en los extremos del intervalo u otra caracterización (0,5 ptos). Responder al número de días transcurridos (0,5 ptos).

**Penalizaciones:** Si un estudiante ha calculado incorrectamente la primera derivada, se podrá valorar el resto del ejercicio, siempre y cuando los resultados obtenidos sean coherentes con el contexto del problema. En ese caso tendría como máximo 5,5 puntos. Si los resultados obtenidos no tienen sentido y el estudiante no lo indica (por ejemplo, valores negativos en el número de usuarios) se aplicará una penalización adicional de 0,5 ptos, dado que esto afecta la validez de la solución en el marco del problema planteado.

### (10 puntos) Ejercicio 3

---

a) (5 puntos) Saber qué cuantil buscar y calcularlo (1,5 ptos), determinar  $n$ ,  $\hat{p}$  (1 pto), calcular error o semiamplitud del intervalo (1,5 ptos). Poner la fórmula del intervalo de confianza y calcularlo (1 pto).

b) (5 puntos) Para obtener la máxima calificación no se necesita tanto detalle como aparece en la pauta de corrección. La falta de notación puede ser sustituida por la explicación, diagramas o tablas.

Definir los sucesos que intervienen en el enunciado:  $E_1$  = Grupo de Edad < 30 años,  $E_2$  = Grupo de Edad mayor o igual a 30 años, CF = Preferencia por Ciencia Ficción (1 pto). Calcular la probabilidad de preferencia por la ciencia ficción aplicando el teorema de la probabilidad total (2 ptos) y calcular la probabilidad de tener menos de treinta años sabiendo que la preferencia es ciencia ficción (2 ptos).

### Ejercicio 4. Opción I

---

Q1) (5 puntos) Calcular los parámetros de la distribución de la variable aleatoria "tiempo medio de espera" (1,5 ptos). Expresar la probabilidad a calcular  $P(\bar{X} < 4)$  (1,5 ptos) y tipificar (1 pto). Calcular la probabilidad a partir de la tabla (1 pto).

Q2) (5 puntos) Despejar la matriz,  $X = A^{-1}(A^2 - 2A)$  (1,5 ptos).

— Si se ha optado por desarrollar  $X = A^{-1}A^2 - 2A^{-1}A = A - 2I$  (1,5 + 1 ptos). Realizar la operación anterior (1 pto).

— Si se ha calculado la inversa (1,5 ptos),  $(A^2 - 2A)$  (1,5 ptos), multiplicar y llegar al resultado final (0,5 ptos).

### Ejercicio 4. Opción II

---

Q1) (5 puntos) Escalonar la matriz del sistema y análisis de rangos para comprobar que se trata de un SCD (3 ptos). Obtener el valor de las incógnitas (2 ptos).

Q2) (5 puntos) Identificar indeterminación (0/0) (0,5 ptos), multiplicar por el conjugado (1 pto), operar el numerador (1 pto). Factorizar numerador y simplificar (1 pto). Calcular el límite de la expresión resultante (0,5 ptos). Responder a la pregunta de la asíntota vertical (1 pto).