

TIEMPO DISPONIBLE: 1 hora 30 minutos

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El examen consta de cinco preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2 puntos. Las tres primeras preguntas son obligatorias, mientras que en las dos últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 4 y 5. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. La caída de los tipos de interés en el segundo semestre de 2024 permitió a las familias ahorrar alrededor de 200 euros al mes en comparación con lo que venían pagando por sus hipotecas y préstamos. Este ahorro equivalía a más de 2000 euros anuales. Ante este escenario, los bancos ofrecieron condiciones más atractivas para captar clientes, lo que generó una fuerte competencia entre las entidades. Una de ellas lanzó los siguientes productos: Préstamo 24 Horas, Préstamo Auto y Préstamo Estudia. Cada cliente podía contratar, como máximo, uno de ellos.

La política de la empresa determinó que el reparto final de los préstamos concedidos fuera el siguiente: un 45 % correspondió a Préstamos 24 Horas, un 40 % a Préstamos Auto y un 15 % a Préstamos Estudia. Además, se analizó el porcentaje de impago en estos productos, que fue del 20 % en Préstamos 24 Horas, del 30 % en Préstamos Auto y del 25 % en Préstamos Estudia.

Basándote en el contexto anterior, responde estos cuatro apartados:

- (0,5 puntos) Seleccionado un préstamo al azar, calcula la probabilidad de que no se haya pagado.
- (0,5 puntos) Sabiendo que no se pagó un préstamo, calcula la probabilidad de que sea un Préstamo Auto.
- (0,5 puntos) Si se pagó el préstamo, calcula la probabilidad de que sea un Préstamo Estudia.
- (0,5 puntos) Según los datos proporcionados por el enunciado, indica dos sucesos relacionados con este problema que sean incompatibles. Justifica la respuesta.

2. Responde justificadamente los siguientes apartados:

- (1 punto) Calcula el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$.
- (0,5 puntos) Razona, sin calcular la integral, si $\int_1^2 xe^x dx$ tiene signo positivo o negativo.
- (0,5 puntos) Calcula la integral $\int_1^2 xe^x dx$.

3. Una fábrica de productos químicos produce 3 fármacos diferentes. Anualmente, esta fábrica tiene 4 clientes que, durante el mes de febrero, realizaron pedidos y/o devoluciones. Dichos datos (en miles de unidades) se han recogido en la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (0,5 puntos) Indica qué representan las filas y las columnas, y especifica cuáles son las compras que ha hecho cada cliente durante el mes de febrero.
- (1,5 puntos) Sabiendo que el primer cliente ha gastado un total de 3250 €, el segundo un total de 2850 € y el cuarto un total de 2800 €, ¿cuál es el precio por unidad de cada fármaco?

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \pi)$, donde arctg denota la función arcotangente.

a) (1 punto) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f . Estudia y halla, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) (1 punto) Calcula $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)}$. ¿Cuál sería el valor del límite si cambiamos en el denominador $\operatorname{sen}(x)$ por $g(x)$, siendo $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$?

4.2 La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

a) (1,5 puntos) ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea mínima?

b) (1,5 puntos) ¿Es posible determinar las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea máxima?

5. Elige entre 5.1 y 5.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

5.1 (2 puntos) Sean u y v dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen $a = (u \times v) + w$, $b = v \times (v \times w)$ y $c = u \cdot (v \times w)$. Indica si a , b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos a alguno de los vectores u , v y w .

5.2 a) (1 punto) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(4, -3, 0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv -2x + z - 1 = 0$.

b) (1 punto) Considera el triángulo de vértices $A(0, 0, 0)$, $B(2, 4, 0)$ y $C(5, 0, 0)$. Utilizando productos vectoriales, calcula su área, y comprueba el resultado mediante otro método.

Nota: Puedes utilizar las siguientes fórmulas si te resultan de utilidad en alguno de los ejercicios anteriores.

- En el paralelogramo $ABCD$ podemos calcular su área con la expresión $\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$.
- Dado un triángulo ABC , su área puede obtenerse con la expresión $\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$.
- Sea el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AD}$, entonces su volumen puede ser obtenido por la expresión $\text{Volumen} = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$.
- El volumen de un tetraedro de vértices A , B , C y D puede ser obtenido por la expresión

$$\text{Volumen} = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{6}.$$