

El examen consta de cinco preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2 puntos. Las tres primeras preguntas son obligatorias, mientras que en las dos últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 4 y 5. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. En un ecosistema interactúan tres especies que llamaremos A, B y C. La población de cada especie en el mes k viene dada por a_k , b_k y c_k , respectivamente. La evolución de sus poblaciones puede modelizarse mediante la relación existente entre las poblaciones en un mes $k + 1$ y en el mes anterior, k :

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \quad \text{con } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) (0,5 puntos) Si en el instante inicial ($k = 0$) hay 100 ejemplares de la especie A, 124 de la especie B y 234 de la especie C, ¿cuántos ejemplares hay de cada especie dos meses después?
- b) (0,5 puntos) Razona (sin calcular M^k) que se cumple la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix},$$

donde a_0 , b_0 y c_0 son el número de ejemplares de cada especie en el instante inicial.

- c) (1 punto) Calcula M^k con $k \in \mathbb{N}$. ¿Qué ocurrirá con el número de ejemplares de cada una de las especies con el paso del tiempo?

2. Sea $f(x)$ una función continua definida en $[0, +\infty)$ tal que $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$, y

$$f(1) = 2e - 2.$$

- a) (1 punto) Calcula $f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- b) (1 punto) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f . Justifica que $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$.

3. Sean los planos $\pi \equiv x - 2y + 4z + 1 = 0$ y $\pi_d \equiv 2x - 3y + 6z = d$, con $d \in \mathbb{R}$.

- a) (1 punto) ¿Hay algún valor de $d \in \mathbb{R}$ para el cual los planos π y π_d no se corten?
- b) (1 punto) Calcula, para $d = -2$, los puntos de corte entre los planos π y π_d .

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Para una prueba de Bachillerato se ha preparado un cuestionario tipo test de 4 preguntas con 5 respuestas posibles a cada pregunta. Cada pregunta correctamente respondida suma 2,5 puntos. Por cada respuesta incorrecta se restan 0,625 puntos. Si no se contesta a la pregunta, se puntúa con 0.

- a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de sacar sobresaliente (nota mayor o igual a 9) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?
- b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de suspender (nota menor que 5) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?

4.2 En un hospital se realizan dos técnicas diferentes de intervención para una misma lesión. Se muestra en la siguiente tabla el número de intervenciones realizadas en los últimos años clasificadas por tipo de técnica y gravedad de la lesión antes de la intervención:

	Nº intervenciones	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	44	140
Leves	136	40

En la tabla siguiente se muestra el número de intervenciones que fueron efectivas ante la lesión:

	Nº intervenciones efectivas	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	30	102
Leves	120	36

- a) (0,5 puntos) Se elige al azar el expediente de una intervención realizada en el hospital para esta lesión. Sabiendo que la intervención ha sido efectiva, ¿cuál de las dos técnicas es más probable que se haya usado?
- b) (1 punto) Con los datos anteriores, un cirujano del hospital quiere elegir la técnica que le proporcione mayor probabilidad de éxito. ¿Qué técnica elegirá para una lesión leve?, ¿y para una lesión grave?
- c) (0,5 puntos) El protocolo del hospital cuando se desconoce la gravedad de la lesión es aplicar la técnica 1. Justifica por qué este protocolo no es el más adecuado.

5. Elige entre 5.1 y 5.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

5.1 (2 puntos) En un archivo de la universidad se están digitalizando los expedientes allí almacenados. La universidad dispone de 70 archiveros que pueden realizar el trabajo y de un número limitado de equipos informáticos. Inicialmente se crea un equipo de trabajo con 50 archiveros. Se ha observado que cada uno de los integrantes de ese equipo digitaliza 80 expedientes mensualmente y que por cada archivero más que se añada al equipo, se reduce en uno los expedientes que digitaliza cada archivero al mes. Determina el número de archiveros que deben formar el equipo para que el número de expedientes digitalizados al mes sea máximo.

5.2 (2 puntos) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{1 - \cos(x)}$.

Nota: Puedes utilizar las siguientes fórmulas si te resultan de utilidad en alguno de los ejercicios anteriores.

- En el paralelogramo $ABCD$ podemos calcular su área con la expresión $\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$.
- Dado un triángulo ABC , su área puede obtenerse con la expresión $\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$.
- Sea el paralelepípedo definido por los vectores \vec{AB} , \vec{AC} y \vec{AD} , entonces su volumen puede ser obtenido por la expresión $\text{Volumen} = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$.
- El volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y D puede ser obtenido por la expresión

$$\text{Volumen} = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{6}$$

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si el valor buscado se encuentra entre dos valores de la tabla, elija el más próximo de los dos. En el caso de que las distancias por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

El diseño de esta prueba no solo se centra en evaluar la adquisición de conocimientos matemáticos, sino también en valorar **la integración de los saberes y las competencias específicas**. Entre ellas, destaca la capacidad de **modelización y resolución de problemas**, y su aplicación para abordar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito científico. **Los estudiantes deberán justificar sus procedimientos y cómo llegaron a sus conclusiones, explicando por qué estas son válidas dentro del contexto del problema.** Aquí se valorará especialmente que los estudiantes puedan explicar procedimientos de forma comprensible.

En conjunto, la evaluación no solo tomará en cuenta la corrección de los procedimientos utilizados, sino también la capacidad de los estudiantes para conectar ideas matemáticas y aplicar los saberes adquiridos a contextos reales, alineando su aprendizaje con los criterios de evaluación establecidos en el currículo.

Criterios adicionales:

- **Deducciones por corrección lingüística:** Los vocales correctores marcarán los errores en el ejercicio y especificarán claramente la deducción efectuada en la nota global en relación con:

1. La corrección ortográfica (grafías y tildes).
2. La coherencia, la cohesión, la corrección gramatical, la corrección léxica y la presentación.

La máxima deducción global en el ejercicio será de 1 punto, conforme a los siguientes criterios:

- Cuando se repita la misma incorrección ortográfica (ya sea grafía o tilde) ésta computará como una sola.
 - Las dos primeras incorrecciones ortográficas no se penalizarán.
 - A partir de la tercera, por cada incorrección ortográfica, ya sea grafía o tilde, se deducirá 0,1 puntos.
 - Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de 0,5 puntos.
 - En aquellos casos en los que la suma de las deducciones anteriores sea superior a un punto, la máxima deducción a aplicar será de 1 punto.
- **Planteamiento y explicaciones:** En las respuestas primará el correcto planteamiento del problema y se valorarán positivamente las explicaciones claras y precisas, y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas. En ningún caso se otorgará la calificación máxima cuando únicamente se dé el resultado sin aportar ningún cálculo ni explicación. **En cada una de las cinco preguntas, podrán descontarse hasta 0,2 puntos por falta de rigor matemático en la respuesta. Estas penalizaciones, junto con las correspondientes por corrección lingüística, no podrán superar en ningún caso 1 punto en total.**

Algunos ejemplos de situaciones que se considerarán falta de rigor matemático en la respuesta:

- Usar símbolos (como el =) de forma inadecuada.
- Si los intervalos no son abiertos (o cerrados) según las condiciones especificadas o se salen del dominio definido en el problema.
- No poner lím cuando es un límite o el valor en el cual se está calculando el límite.
- Notación inadecuada de la integral o no poner la constante de integración.
- No poner dónde se mueve una variable libre o un parámetro.
- La falta de unidades cuando corresponda o que no sean las apropiadas.
- Dividir por una expresión que puede ser nula (o no justificar que no lo es).
- No justificar que una matriz es regular para usar su inversa.
- Dar una probabilidad como porcentaje, o un porcentaje como probabilidad.

La existencia de uno de estos errores en un ejercicio no implicará necesariamente la penalización máxima de 0,2 puntos. Deberá valorarse dentro del contexto del ejercicio y de las explicaciones y justificaciones proporcionadas.

- **Errores y coherencia:** Si se comete un error en una parte de la pregunta que afecta a los resultados posteriores, se valorará si hay coherencia con el resultado erróneo. En tal caso, se valorará el resto de las cuestiones de la misma pregunta, aunque si el error conduce a problemas más simples de los inicialmente propuestos disminuirá la calificación. Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos. **Resultados absurdos**, como 3,5 personas, áreas negativas o probabilidades mayores que uno o negativas, serán penalizados. Sin embargo, si los estudiantes reconocen y justifican que estos resultados no son posibles y pueden deberse a errores en cálculos anteriores, la penalización será menor.

A continuación se detallan los criterios específicos de cada ejercicio a través de los métodos considerados más habituales. **Un ejercicio podrá obtener la puntuación máxima, aunque se haya realizado por otro método alternativo**, si es correcto y se ha justificado la respuesta dada.

1. (2 puntos)

- a. (0,5 puntos) Si sólo plantean los cálculos a realizar y no obtienen los valores pedidos: 0,2 puntos.
- b. (0,5 puntos) No se pretende que demuestren la propiedad por inducción. Se obtendrá la puntuación máxima si observan que se cumple para algunos valores de k y deducen el resultado.
- c. (1 punto)
 - Hallar M^k : **0,8 puntos**.
Si sólo calculan M^2 y M^3 : 0,4 puntos.
 - Explicación de lo que ocurrirá: **0,2 puntos**.
No es necesario que calculen el límite cuando k tiende a infinito para obtener la puntuación máxima, basta con explicaciones como que la población se mantiene constante, la población crecerá, ...

2. (2 puntos)

- a. (1 punto)
 - Calcular bien una primitiva: **0,5 puntos**.
 - Calcular el valor de la constante: **0,3 puntos**.
 - Calcular el límite: **0,2 puntos**.
- b. (1 punto)
 - Observar el signo de la derivada y deducir que f es creciente: **0,7 puntos**.
 - Justificar que $f(x)$ es mayor o igual que 0: **0,3 puntos**.

3. (2 puntos)

- a. (1 punto) Se puede obtener la calificación máxima observando que el sistema es compatible para cualquier valor de d , o también viendo que los dos vectores normales son linealmente independientes.
- b. (1 punto) Se puede obtener la calificación máxima si argumentan que los puntos de corte son los de la recta definida por la intersección de los planos.
También si resuelven el sistema compatible indeterminado y obtienen la ecuación paramétrica de esa recta.

4.1. (2 puntos)

- a. (1 punto)
 - Determinar que, para sacar sobresaliente, hay que acertar todas las preguntas: **0,2 puntos**.
 - Obtener la probabilidad pedida: **0,8 puntos**.
Si no llegan al resultado final, pero han determinado la probabilidad de acertar una pregunta respondiéndola al azar: 0,1 puntos.
- b. (1 punto)
 - Determinar que, para suspender, hay que fallar más de una pregunta: **0,2 puntos**.
 - Usar la expresión correspondiente de la binomial y obtener la probabilidad pedida: **0,8 puntos**.

4.2. (2 puntos)

- a. (0,5 puntos) No es necesario calcular la probabilidad de cada técnica para obtener la puntuación máxima. Pueden justificarlo con el número de intervenciones eficaces de cada técnica.
- b. (1 punto)
 - Contestar el caso de lesiones leves: **0,5 puntos**.
 - Contestar el caso de lesiones graves: **0,5 puntos**.
- c. (0,5 puntos) Se valorará con la máxima puntuación cualquier comentario que indique que en ambos casos (leves y graves) la técnica 2 tiene mayor probabilidad de ser efectiva y, por tanto, dicha técnica es la que debe elegirse.

5.1. (2 puntos)

- Definir la función número de expedientes digitalizados al mes: **1 punto**.
- Obtener el punto crítico: **0,4 puntos**.
- Justificar que el punto crítico es el máximo absoluto y dar la solución: **0,6 puntos**.

5.2. (2 puntos)

- Aplicar bien la regla de L'Hôpital una vez: **1 punto**.
- Aplicar bien esa regla una segunda vez: **1 punto**.